EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962
III - 1 NOVEMBER 1961

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

FUNCTIES EN RELATIES [1])

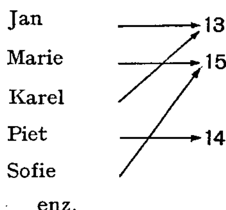
door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek.

Functies. Bij de behandeling van het functiebegrip dient voorop te staan, dat een functie een toevoeging is: aan de elementen van van een verzameling A worden elementen van een verzameling B toegevoegd, en wel aan elk element van A één element van B. De verzameling A heet de *bron* [2]) van de functie, de verzameling van de elementen van B, die aan een element van A toegevoegd zijn, de *waardenverzameling.*

De bestudering van dit vrij abstracte begrip kan het beste ingeleid worden door middel van niet-mathematische voorbeelden. Neem b.v. de leerlingen van de klasse, vraag in welke plaats zij wonen en voeg zo aan elke leerling een plaatsnaam toe. Of vraag hoe oud zij zijn en voeg aan elke leerling zijn leeftijd toe. Dit verband kan aanschouwelijk gemaakt worden met behulp van een schema, zoals



De bron bestaat uit de leerlingen van de klas, de waardenverzameling uit hun leeftijden. Van elk element van de bron vertrekt één pijl, maar bij elk element van de waardenverzameling mogen meer pijlen samenkomen.

Het kan ook gebeuren, dat de waardenverzameling een deel is van de bron. Dit is b.v. het geval, als de leerlingen van de klasse moeten stemmen om één van hen als vertegenwoordiger bij een of ander concours aan te wijzen. Elke leerling zal dan een stembriefje inleveren met de naam van een van zijn klasgenoten erop.

---

[1]) Voordracht gehouden voor de W.V.O. op 25 februari 1961 te Utrecht.

[2]) De nomenclatuurcommissie beveelt aan: definitieverzameling. Ik probeer het eens met het korte, van Prof. Dr. N. H. Kuiper afkomstige woord „bron", dat de commissie niet bekend geweest is.

We gaan daarna over tot wiskundige voorbeelden. Bij voorkeur brengen we dan eerst die functies ter sprake, waarmee de leerlingen reeds kennis gemaakt hebben, zonder dat hun expliciet duidelijk gemaakt is, dat het functies zijn. Een dergelijk voorbeeld kan zijn de getallenrechte, waarbij aan getallen punten van een rechte lijn toegevoegd zijn. Mogelijk zijn ook reeds in de meetkunde punttransformaties aan de orde geweest. Translaties, rotaties en spiegelingen zijn uitstekende voorbeelden van functies, waarbij aan elk punt van het platte vlak een punt van dat vlak is toegevoegd. Verder is ook de projectie een goed voorbeeld.

Hiermee is ons uiteindelijke doel, het functiebegrip binnen de algebra, voldoende voorbereid. We gaan dus nu over naar toevoegingen, die het kenmerk hebben, dat aan getallen getallen toegevoegd worden. Veelal is de waardenverzameling hier een deel van de bron. Eerst gaan we dergelijke toevoegingen oefenen in concreto. Vraag alle leerlingen een getal op te schrijven (we kunnen gemakshalve de niet-essentiële beperking opleggen, dat het een natuurlijk getal kleiner dan 20 moet zijn). Geef nu de opdracht dit getal met 4 te vermenigvuldigen, er daarna 6 bij op te tellen, de uitkomst door 2 te delen en daarna met 1 te verminderen. Aan elk oorspronkelijk gekozen getal wordt hierdoor een bepaalde uitkomst toegevoegd. We kunnen dit verband door een formule voorstellen: als we uitgaan van het getal x, blijkt de uitkomst $2x + 2$ te zijn. We hebben op deze wijze de functie $x \rightarrow 2x + 2$ tot stand gebracht. Nuttig is dit soort voorbeelden af te wisselen met een voorbeeld als: kies een getal, vermenigvuldig het met 6, trek er 3 af, deel door 3, tel er 1 bij op en deel door 2. Of: kies een getal, tel er 4 bij, vermenigvuldig met 2 en trek het oorspronkelijke getal er 2 maal af. Op natuurlijke wijze hebben we dan de toevoegingen $x \rightarrow x$ en $x \rightarrow 8$ als functies leren zien. Vooral het laatste voorbeeld levert anders vaak moeilijkheden, die slechts langzaam overwonnen worden.

Eerst nu is de leerling rijp gemaakt voor het zonder meer opstellen en onderzoeken van functies als $x \rightarrow 3x - 5$. Zonder deze inleiding kan het niemand duidelijk worden, waarom het zin heeft functies te gaan beschouwen en wat het wezenlijke is van een functie, nl. het toevoegingskarakter.

Grafieken. We zijn begonnen met functies aanschouwelijk voor te stellen door middel van schema's. Zolang de bron uit een betrekkelijk klein aantal elementen bestaat, is deze methode doeltreffend. Bestaat echter, zoals in de algebra veelal het geval is, de bron uit een oneindige verzameling, b.v. de verzameling van de

rationale of reële getallen (al naarmate het moment, waarop we het functiebegrip gaan behandelen), dan moeten we naar betere methoden gaan zoeken om een aanschouwelijk overzicht te verkrijgen van het verband tussen argument- en functiewaarde. We maken daarbij gebruik van de getallenrechte. De simpelste methode is twee getallenrechten te kiezen, met de waarden van het argument punten van de ene en met de functiewaarden punten van de andere rechte te laten corresponderen. Het verband tussen argument en functiewaarde wordt nu voorgesteld door een pijl, die de bijbehorende punten op beide rechten verbindt. Zo is in fig. 1 op deze wijze de functie $x \rightarrow 2x - 1$ in beeld gebracht.

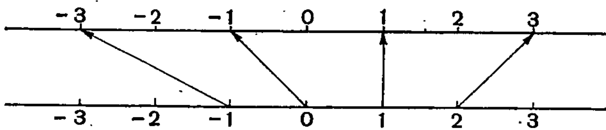


Fig. 1.

Hoewel deze methode zeer eenvoudig is, is evident, dat ze onbruikbaar wordt zodra meer ingewikkelde functies grafisch voorgesteld worden. Reeds bij kwadratische functies geeft ze geen overzichtelijk beeld van het verband tussen argument- en functiewaarde. Men neemt dan meestal zijn toevlucht tot de volgende, algemeen bekende methode. Teken de beide getallenrechten loodrecht op elkaar zo, dat de nulpunten samenvallen. We krijgen dan in eerste instantie fig. 2. Om het overzicht te bevorderen voegen we nu aan elk paar corresponderende punten op de gebruikelijke manier een punt van het platte vlak toe, waardoor fig. 3 ontstaat. De verzameling zo verkregen punten, in dit geval een rechte lijn, is dan de grafiek van de functie.

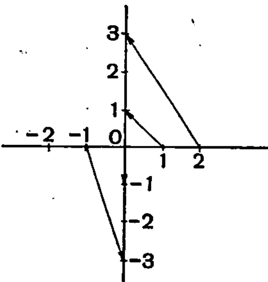


Fig. 2.

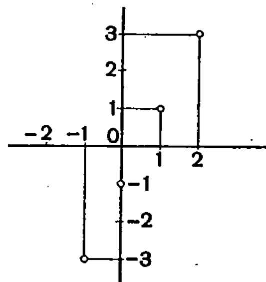


Fig. 3.

Deze algemeen gangbare methode heeft het voordeel overzichtelijk te zijn. Er zit echter helaas voor het begrip een groot nadeel in, namelijk de betrekkelijk grote mate van gecompliceerdheid. De grafiek is namelijk zelf geen enkelvoudige, maar een samengestelde functie. Aan het paar waarden van argument en functie wordt eerst een puntenpaar toegevoegd en aan dit puntenpaar weer een enkel punt. Geoefenden kunnen in deze complicatie nauwelijks een bezwaar zien, voor beginners mag men de moeilijkheid niet onderschatten. Als we een methode kunnen vinden, die een even overzichtelijk resultaat oplevert en het bezwaar mist in wezen een samengestelde functie te impliceren, verdient het aanbeveling, althans in het begin, deze methode toe te passen. En een dergelijke methode is gemakkelijk te vinden.

We kiezen slechts één getallenrechte. Aan de argumentwaarden voegen we punten van deze rechte toe. In ons voorbeeld, $x \rightarrow 2x - 1$, is aan de waarde $x = 2$ de functiewaarde 3 toegevoegd. We richten nu in het punt $x = 2$ van de getallenrechte een loodlijn op en zetten daar een lijnstuk met lengte 3 op af, waarvan het ene uiteinde een punt van de getallenrechte is. Het andere uiteinde voegen we toe aan het punt $x = 2$. De verzameling van de op deze wijze aan de punten van de getallenrechte toegevoegde punten, is de grafiek van de functie (fig. 4). We krijgen zo dezelfde grafiek als in fig. 3, maar deze grafiek is via een enkelvoudige functie tot stand gekomen is en daardoor gemakkelijker te begrijpen.

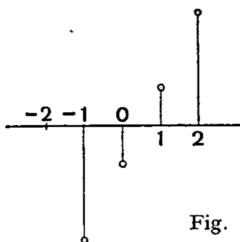


Fig. 4.

De leerling ziet op deze manier gemakkelijker het directe verband tussen argument- en functiewaarde.

Het verdient aanbeveling de methode toe te lichten met behulp van voorbeelden uit het dagelijks leven. Hiervoor kunnen doelmatig gekozen worden de temperatuur van een patiënt als functie van de tijd, het gewicht van een baby als functie van de tijd, de snelheid van een auto als functie van de tijd (begin met snelheid 0), de prijs van een spoorkaartje als functie van de afstand (reductie bij hogere afstanden). Daarna kiezen we bij voorkeur niet direct

grafieken van lineaire functies, maar b.v. van kwadratische. We tekenen de grafiek van $x \to x^2 - 4$ en maken vraagstukken van de volgende typen:

a. lees de functiewaarde af voor $x = \frac{3}{2}$,
b. lees af, voor welke waarden van x de functiewaarde gelijk aan 2 is,
c. voor welke waarden van x is $x^2 - 4 > 5$?,
d. welke waarden neemt de functie aan, als $1 < x < 3$ resp. $-1 < x < 2$?

Nadat zo een goed inzicht verkregen is in de betekenis van een grafiek, kan men met een systematische behandeling van de grafieken van lineaire functies beginnen. Begint men direct met lineaire functies, dan wordt het begrip grafiek te sterk associatief met „rechte lijn" verbonden.

Relaties. Om een goed begrip van relaties te krijgen, moeten we eerst een uitstapje maken op het terrein van de logica. „Jan is een vriend van Piet" is een propositie (uitspraak). Vervangen we hierin „Jan" door „x", dan krijgen we: „x is een vriend van Piet". Dit is geen uitspraak meer, want het heeft geen zin ervan te zeggen, dat het waar of onwaar is. Wel ontstaat hieruit een propositie, zodra we x door de naam van een of andere persoon vervangen. Of „x is een vriend van Piet" dan overgaat in een ware of in een onware propositie, hangt ervan af, wat we voor x substitueren. We noemen het daarom een *propositionele functie*. We kunnen nog verder gaan en „Piet" door „y" vervangen. We krijgen dan: „x is een vriend van y", een propositionele functie met twee variabelen. Hieruit kunnen we op zijn beurt afleiden: „$(\exists x)$ (x is een vriend van y)" (d.w.z. er is een x met de eigenschap, dat x een vriend van y is). Dit is weer een propositionele functie met één variabele, nl. met de variabele y. Vervangen we y door de naam van een persoon, dan ontstaat er een propositie. Vervangen we b.v. y door „Piet", dan krijgen we: „$(\exists x)$ (x is een vriend van Piet)". Dit is waar, als Piet een vriend heeft, en onwaar, als Piet er geen enkele vriend op na houdt.

Men is geneigd te zeggen, dat in het voorbeeld „$(\exists x)$ (x is een vriend van y)" twee variabelen voorkomen, namelijk x en y. Dit is in zekere zin inderdaad het geval, maar deze variabelen hebben een geheel verschillende rol. Of een juiste propositie ontstaat, hangt af van hetgeen we voor y substitueren, terwijl substitutie voor x geen zin heeft. We noemen daarom x ook wel een ***gebonden variabele*** en y een ***vrije variabele***.

Na deze uitwijding kunnen we overgaan tot de definitie van een (binaire) relatie. Dit kan op twee manieren gebeuren, die in wezen op hetzelfde neerkomen.

a. Een relatie is een propositionele functie met twee vrije variabelen. B.v. $x > y$, $x^2 + y^2 = 1$, $(\exists z)\ (z > 0 \wedge y \neq 0 \wedge x^2 = yz)$ [1]. Men kan de laatste relatie ook schrijven: $x \neq 0 \wedge y > 0$.

b. Een relatie is een verzameling geordende paren. Bovengenoemde relaties zijn dan de verzamelingen $\{(x,\ y) \mid x > y\}$, $\{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\{(x,\ y) \mid x \neq 0 \wedge y > 0\}$.

Elke propositionele functie met twee vrije variabelen bepaalt een verzameling van geordende paren, en omgekeerd wordt elke verzameling van geordende paren door een propositionele functie met twee vrije variabelen bepaald. De onder a en b vermelde methoden om relaties te beschouwen zijn dus ekwivalent. Het zijn alleen verschillende schrijfwijzen.

Uiteraard zijn deze uiteenzettingen over de aard van relaties voor de leraar bestemd en voorlopig niet voor de leerling. We moeten nu een weg zoeken om de leerling met relaties vertrouwd te doen geraken. Het ligt voor de hand een relatie daarbij te zien als een toevoeging, maar nu met een minder speciaal karakter dan bij functies het geval was. Bij een functie was een bepaalde waarde van het argument het uitgangspunt en werd daaraan één waarde van de functie toegevoegd. Bij een relatie tussen x en y daarentegen worden bepaalde waarden van x en y met elkaar verbonden en tot een paar verenigd, dat aan de relatie voldoet. Er moet hier dus geen sprake zijn van verbindingspijlen, maar van verbindingsstrepen, en bovendien vervalt de eis, dat van een waarde van x slechts één streep mag vertrekken.

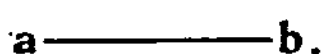
We beginnen weer met voorbeelden uit het dagelijks leven. We kunnen de leerlingen gaan vragen in welke provinciehoofdsteden zij wel eens geweest zijn. We krijgen dan een relatie tussen leerlingen en plaatsnamen, waarvan we een schema maken. Een andere relatie is die tussen de breedte van een plaats op aarde en het aantal uren, dat de zon er op een dag kan schijnen. Noem de breedte x graden en het aantal uren zonneschijn y. Dan is $x = 0$ door de relatie verbonden met $y = 12$. Neemt x toe, dan beslaan de waarden van y, waarmee x verbonden is, een steeds toenemend gebied om 12, terwijl ten slotte $x = 90$ verbonden is met $0 \leqq y \leqq 24$.

Iets moeilijker zijn de relaties tussen x en y, waarbij de waarden van x en van y tot dezelfde verzameling behoren met dien verstande,

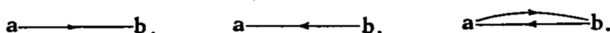
---

[1]) $\wedge$ betekent „en", $\vee$ „of" en $\sim$ „niet".

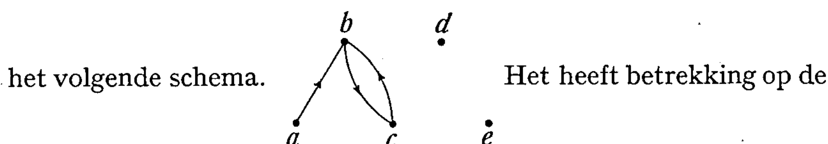
dat zowel $R(a, b)$ als $R(b, a)$ zinvolle uitspraken kunnen zijn. We kiezen als voorbeeld de relatie: x is broer van y. Het kan zijn, dat a een broer is van b en omgekeerd, het kan ook zijn, dat a een broer is van b en niet omgekeerd. We kunnen in het schema dus niet volstaan met



want dan weten we niet, of a een broer is van b, b een broer van a of mogelijk beide. We geven daarom deze drie gevallen op verschillende manieren aan, nl. resp. door



Familierelaties leveren een zeer vruchtbaar veld voor het bestuderen van relaties. Een enkel voorbeeld wordt gegeven door het volgende schema.



Het heeft betrekking op de relatie „is broer van". Het is niet volledig; slechts een deel van de strepen is getekend. Gegeven is verder, dat d en e door geen enkele streep verbonden worden. Maak het schema af en maak ook een schema van de relatie „is zuster van". Verder kunnen we genealogische tabellen geven en de relaties „is moeder van", „is grootmoeder van", „is oom van", enz. laten tekenen. Ook kunnen we uit de bekendheid van de relaties „is moeder van" en „is vader van" de relatie „is grootmoeder van" of „is grootmoeder van moeders zijde van" e.d. laten afleiden.

Als men er even over nadenkt, vindt men schier geen einde aan de bruikbare voorbeelden. Men doet er enerzijds goed aan zich te beperken, anderzijds is het nuttig de leerlingen bij te brengen, dat relaties niets bijzonders zijn, maar in elke uitspraak een rol spelen. Zelfs in eenvoudige uitspraken als „ik ga met de tram" of „ik geef hem een hand" is sprake van een relatie.

Hierna komen wiskundige voorbeelden aan de orde. Als voorbeelden zou ik willen noemen: x is deler van y, $x = y$, $x < y$, $x \leqq y$, $x + y = 10$, $x + y < 10$, $x^2 + y^2 = 1$. Steeds geven we een beperkt aantal getallen en laten we het bijbehorende schema maken.

Ik geloof niet, dat het aanbeveling verdient reeds direct een uitvoerige theorie van de relaties te geven, maar meen, dat men het

volgende minimum niet mag overslaan. Bijzondere soorten relaties zijn:

a. *symmetrische* relaties, d.z. relaties, waarvoor geldt $R(x, y) \rightarrow R(y, x)$; voorbeelden: x en y zitten naast elkaar, $x + y = 1$,

b. *antisymmetrische* relaties, d.z. relaties, waarvoor geldt $R(x, y) \rightarrow \sim R(y, x)$; voorbeelden: x is kind van y, $x < y$,

c. *transitieve* relaties, d.z. relaties, waarvoor geldt $R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)$; voorbeelden: x is voorouder van y, x is deler van y, $x < y$,

d. *reflexieve* relaties, d.z. relaties, waarvoor geldt $R(x, x)$; voorbeelden: x is even oud als y, $x \leqq y$.

Men kan de aard van deze relaties schematisch toelichten op de volgende manier:



Geef nu een serie relaties en laat de leerling zelf onderzoeken, van welke aard deze zijn.

Verder is van belang het begrip *inverse* relatie, d.i. de relatie, die tussen x en y bestaat, als tussen y en x de relatie R bestaat. In formule: $\breve{R}(x, y) =_{\text{def}} R(y, x)$. Voorbeelden liggen voor de hand. Het schema van de inverse relatie wordt uit dat van de oorspronkelijke verkregen door de pijltjes in de strepen van richting om te keren.

Grafieken van relaties. We hebben gezien, dat in een relatie tussen x en y de beide variabelen een gelijkwaardige rol hebben. Een bepaald paar voldoet aan de relatie. Het ligt voor de hand bij het maken van een grafiek x en y dan op dezelfde wijze te behandelen. We moeten dus een meetkundige voorstelling zoeken, waarbij aan getallenparen punten toegevoegd worden. We tekenen daarom een x-as en een y-as en voegen nu, op de manier die we indertijd verworpen hebben (fig. 3), aan elk paar waarden van x en y een punt van het platte vlak toe. Men mag mij niet verwijten, dat ik een eens verworpen standpunt nu toch ga verdedigen. Ten eerste is de situatie anders, waardoor we tot het innemen van dit standpunt min of meer gedwongen worden. Ten tweede is de leerling nu verder in zijn ontwikkeling, waardoor voor hem de moeilijkheden minder groot zijn. En ten derde zal hij zich vroeg of laat vertrouwd moeten

maken met het voorstellen van getallenparen door punten in het platte vlak door middel van een coördinatenstelsel. Het moment, waarop we hiertoe overgaan, lijkt mij zowel didactisch als wetenschappelijk juist gekozen. Het principiële verschil tussen een functie en een relatie maakt deze andere wijze van grafisch voorstellen namelijk noodzakelijk.

In fig. 5 zijn de grafieken van de reeds genoemde relaties $x > y$, $x^2 + y^2 = 1$ en $x \neq 0 \wedge y > 0$ getekend. De stippellijnen behoren niet tot de grafiek.

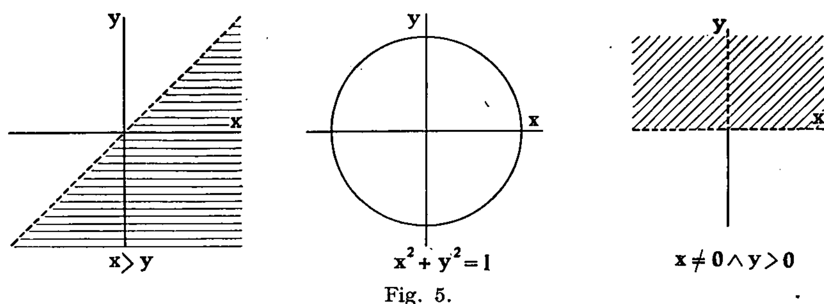


Fig. 5.

We geven hier nog enkele voorbeelden van relaties, waarvan het instructief is de grafiek te tekenen.

a. x is deelbaar door y, x en y zijn natuurlijke getallen, $x \leqq 10$, $y \leqq 10$,
b. $x^2 + y^2 = 0$,
c. $x^2 + y^2 \leqq 1 \wedge x + y > 1$,
d. $x^2 + y^2 \leqq 1 \vee x + y > 1$,
e. $\sim (x^2 + y^2 \leqq 1 \wedge x + y > 1)$,
f. $x^2 + y^2 \leqq 1 \wedge | x - 1 | > 2$,
g. $x^2 + y^2 \leqq 1 \wedge | x - 2 | \geqq 1$,
h. $x^2 + y^2 > 1 \vee x^2 + y^2 < 2$.

In geval a bestaat de grafiek uit geïsoleerde punten, in geval b uit één enkel punt. In geval c bestaat de grafiek uit de doorsnede van twee verzamelingen, in geval d uit hun vereniging. In geval e is de grafiek het complement van de grafiek van c. Deze voorbeelden dienen enerzijds om het werken met verzamelingen te repeteren, anderzijds leren ze ons zien, wat bedoeld wordt met de doorsnede, de vereniging en het complement van relaties en laten ze ons de analogie met de doorsnede, de vereniging en het complement van verzamelingen zien. In geval f is de doorsnede leeg; we maken hier kennis met de lege relatie. In geval g is het beeld van $x^2 + y^2 \leqq 1$

een deel van het beeld van $| x - 2 | \geqq 1$. In een dergelijk geval is de conjunctie van de beide relaties gelijkwaardig met de relatie $x^2 + y^2 \leqq 1$. Men ziet hier, wat het wil zeggen, dat een relatie een deel van een andere relatie is, en ziet tevens de analogie met twee verzamelingen, waarvan de een deel van de ander is. Geval h is een voorbeeld van een al-relatie.

In de gevallen f en g treedt bovendien nog een bijzonderheid op. In f moeten we de doorsnede vormen van de relaties $x^2 + y^2 \leqq 1$ en $| x - 1 | > 2$. Is dit laatste wel een relatie? Er komt alleen de vrije variabele x in voor, zodat we op het eerste gezicht geneigd zijn te ontkennen, dat hier een relatie tussen x en y staat. Zouden we echter $| x - 1 | > 2$ vervangen door $| x - 1 | + y > 2 + y$, dan kwamen er wel twee vrije variabelen in voor en zou er dus wel een relatie tussen x en y staan, terwijl beide ekwivalent zijn. We spreken nu af, dat we $| x - 1 | > 2$ mogen opvatten als een relatie tussen x en y. Als we dit doen, dan voldoen er paren getallen aan, doen we het niet, dan voldoen er slechts waarden van x, dus enkele getallen aan. (Vgl. twee vergelijkingen met twee onbekenden, waarvan in een van de vergelijkingen een van de twee onbekenden niet voorkomt.) Elke propositionele functie mag dus opgevat worden als een relatie met meer vrije variabelen dan er in de propositionele functie voorkomen. Zelfs kan de „propositionele functie" geen enkele vrije variabele bevatten (vgl. de constante functie en de valse of identieke vergelijking). Aan $| x - 1 | > 2$ voldoen in ons geval alle paren (x, y), waarvan x voldoet aan $| x - 1 | > 2$ en y willekeurig is.

Men moet zich niet laten afschrikken door het abstracte karakter van deze voorbeelden. Ze moeten natuurlijk met de nodige zorg en rust behandeld worden. Ze zijn dan echter stellig niet te moeilijk en werken activerend op de leerling. Bovendien helpen ze om het inzicht in de betekenis van de logische operaties „en", „of" en „volgt uit" te verstevigen.

Verder moeten nog de kenmerken behandeld worden van de grafieken van de genoemde bijzondere soorten relaties. De grafiek van een symmetrische relatie is symmetrisch t.o.v. de rechte lijn p, die de hoek tussen de positieve x-as en de positieve y-as middendoor deelt. De grafiek van een antisymmetrische functie heeft de eigenschap, dat twee punten, die symmetrisch t.o.v. p liggen, niet beide tot de grafiek kunnen behoren. De reflexiviteit herkennen we in de grafiek daaraan, dat de rechte p een deel van de grafiek is. Ten slotte vermelden we het verband tussen de grafieken van twee relaties, die elkaars inverse zijn. De grafiek van de relatie $\breve{R}$ wordt

uit die van de relatie R verkregen door spiegeling t.o.v. de rechte p.

Elimineren. We geven twee relaties tussen x en y (men mag ze desgewenst vergelijkingen noemen):

$$x + y = 3$$
$$x^2 + y^2 = 5.$$

We vragen nu aan welke (noodzakelijke en voldoende) voorwaarde x moet voldoen, wil er bij de waarde van x een waarde van y gevonden worden zo, dat aan beide relaties voldaan is. Het beantwoorden van deze vraag heet het elimineren van y uit de twee relaties (vergelijkingen). Het geschiedt als volgt:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x + y = 3 \rightarrow y = 3 - x \quad (3)\\ (2)\ x^2 + y^2 = 5\end{array}\right\} \rightarrow x^2 + (3 - x)^2 = 5 \ (4).$$

De gevraagde voorwaarde is (4). Immers is aan (1) en aan (2) voldaan, dan is aan (3) en dus ook aan (4) voldaan. En is aan (4) voldaan, dan kiezen we y zo, dat aan (3) voldaan is; daardoor is dan aan (1) en (2) voldaan [1]).

Een juist begrip van dit eliminatieproces is van het grootste belang voor het goed oplossen van vergelijkingen. Vaak ziet men de leerling x uit (4) oplossen en daarna substitueren in (2). Op voor hem onbegrijpelijke manier kan hij dan stellen wortels vinden, die niet voldoen. Verder is een goed inzicht in dit proces onmisbaar bij de parametermethode in de analytische meetkunde.

We kunnen nu relaties behandelen van het volgende type:

$$(\exists z)\ (x + y + z = 1 \wedge x + 2y + 3z = 6).$$

Het bestuderen van deze relatie komt neer op het elimineren van z uit

$$x + y + z = 1 \quad \text{en} \quad x + 2y + 3z = 6.$$

We kunnen de relaties dus ook gebruiken om het elimineren van variabelen te repeteren of te verduidelijken.

Functies. Een bijzonder soort relaties wordt gevormd door die relaties $R(x, y)$, waarbij een bepaalde waarde van x nooit met meer dan één waarde van y verbonden is. Dergelijke relaties heten functies. De relatie „trein x gaat naar de plaats y" heeft deze eigenschap niet, want een trein gaat in de regel naar verschillende plaatsen.

[1]) Bij een eerste behandeling van het elimineren bij het oplossen van stelsels vergelijkingen kan men volstaan met erop te wijzen, dat (1) en (2) gelijkwaardig is met (3) en (4).

Daarentegen heeft de relatie „trein x heeft y als eindstation" de eigenschap wel. De relatie $x^2 + y^2 = 1$ heeft de eigenschap niet, $x^2 + y = 1$ daarentegen wel en $x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geqq 0$ eveneens. We zien uit deze voorbeelden, dat de hier bedoelde functies relaties van een bijzondere soort zijn. Men kan veelal deze relaties in de speciale vorm $y = f(x)$ schrijven, in welk geval we zeggen, dat we y als functie van x geschreven hebben. Hoewel er een duidelijke analogie is met de vroeger besproken functies, mogen we niet uit het oog verliezen, dat ze er principieel verschillend van zijn. Een terminologisch onderscheid is dan ook gewenst. We zouden de vroeger besproken functies *constructieve functies* kunnen noemen (de naam is aan Tarski ontleend) en de nu besproken functies *relationele*. In een constructieve functie komt slechts één vrije variabele voor, in een relationele functie twee. Een relationele functie is een propositionele functie met twee vrije variabelen, een constructieve functie is een term (vorm) met één vrije variabele [1]). Het duidelijke verband tussen beide mag ons de ogen niet doen sluiten voor het principiële verschil: $y = f(x)$ is een relationele functie, $f(x)$ daarentegen een constructieve functie. De relationele functie is van gecompliceerder karakter dan de constructieve. Vandaar, dat ik er de voorkeur aan geef de relationele functies later aan de orde te doen komen dan de constructieve en bij de behandeling van constructieve functies nimmer schrijf $y = f(x)$, want daardoor is het constructieve karakter juist verloren gegaan. Konden we bij de behandeling van de constructieve functies de y-as ontberen en was het zelfs gewenst geen functiewaarde-as te gebruiken, bij de behandeling van de constructieve functies is het aangewezen wel een y-as te gebruiken.

Het begrip *inverse functie* kan het beste alleen maar bij de rationele functies aan de orde gesteld worden. Als de relatie $R(x, y)$ de eigenschap heeft een relationele functie voor te stellen en de inverse relatie $R(x, y)$ heeft deze eigenschap ook, dan noemen we deze functies elkaars inverse. We hebben reeds gezien, dat de grafieken van twee inverse relaties door spiegeling uit elkaar verkregen kunnen worden. Voor grafieken van functies, die elkaars inverse zijn, geldt dit dus ook.

Als een relationele functie $R(x, y)$ een inverse heeft, dan wordt daardoor elke waarde van x met één waarde van y tot een paar verenigd en omgekeerd ook elke waarde van y met één waarde van

[1]) Zo is $x + 3$ een constructieve functie van x. Dit is een term (vorm) en geen propositionele functie, want als we voor x een getal substitueren, ontstaat er geen propositie.

x. Zo komen we vanzelf tot het begrip *omkeerbaar eenduidige toevoeging*. Vele toevoegingen zijn omkeerbaar eenduidig, b.v. echtgenoot — echtgenote, auto — autonummer (onder geschikt gekozen vooronderstellingen). Andere lijken op het eerste gezicht omkeerbaar eenduidig te zijn, maar zijn het niet, b.v. de toevoeging naam — persoon (verschillende personen kunnen dezelfde naam hebben), de toevoeging vader — oudste zoon (vaders behoeven geen oudste zoon te hebben).

Verzamelingen, waarvan de elementen omkeerbaar eenduidig aan elkaar toegevoegd kunnen worden, hebben, ten minste als ze eindig zijn, evenveel elementen. Komen we een zaal binnen, waar voor een diner gedekt is en links van elk bord een vork, rechts van elk bord een mes ligt, dan zijn deze vorken en messen door een omkeerbaar eenduidige toevoeging verbonden. Het zijn er dus evenveel. Het ligt nu voor de hand per definitie vast te stellen, dat ook oneindige verzamelingen, tussen welker elementen een omkeerbaar eenduidige toevoeging bestaat, evenveel elementen hebben. Volgens deze definitie zijn er evenveel even als oneven natuurlijke getallen, maar ook evenveel even natuurlijke getallen als natuurlijke getallen. Eventueel is het de moeite waard te laten zien, dat er ook evenveel rationale getallen als natuurlijke getallen zijn. We hebben hier met een essentiële mathematische denkgewoonte kennis gemaakt: het extrapoleren van gevonden wetmatigheden over gevallen, waar deze nog niet gelden, door geschikte keuze van een definitie.

Een volgende vraag is, of we nu ook kunnen spreken over het aantal elementen van de verzameling van natuurlijke getallen en van al die andere verzamelingen, die evenveel elementen hebben. Met deze vraag zullen we ons in de volgende paragraaf bezighouden.

Definite door abstractie. Als de verzameling van de natuurlijke getallen *a* elementen heeft, dan hebben ook de verzameling van de even getallen en van de rationale getallen *a* elementen. Maar wat betekent *a*? Het antwoord: het aantal elementen van de natuurlijke getallen, is ontoereikend, want het leidt tot een vicieuze cirkel. Wel kunnen we de verzameling van de natuurlijke getallen met alle verzamelingen, die evenveel elementen hebben, tot één verzameling verenigen. Dit is dan de verzameling V van al die verzamelingen, die evenveel elementen hebben als de verzameling van de natuurlijke getallen. Nu kunnen we de uitspraak, dat het aantal elementen van de natuurlijke getallen *a* is, op de volgende wijze zinvol maken. We spreken af, dat we zeggen, dat het aantal elementen van een verzameling *a* is, als deze verzameling tot V behoort. We kunnen

voor *a* ook een naam bedenken, nl. *aftelbaar*. We zeggen dus, dat het aantal elementen van een verzameling aftelbaar is, als de elementen zich omkeerbaar eenduidig aan die van de verzameling van de natuurlijke getallen laten toevoegen. Weliswaar hebben we geen expliciete definitie van „aftelbaar" gegeven, maar de zegswijze „het aantal elementen is aftelbaar" is naar behoren gedefinieerd. (Het lijkt me didactisch onverantwoord hier verder te gaan en onder „aftelbaar" te verstaan de verzameling van alle verzamelingen, waarvan de elementen omkeerbaar eenduidig aan die van de natuurlijke getallen zijn toe te voegen.)

Waarop berust bovenstaande definitiemethode? Er bestaat een relatie tussen verzamelingen, nl. de relatie „heeft evenveel elementen". We zullen deze relatie E noemen. Deze relatie heeft drie belangrijke eigenschappen: ze is reflexief, symmetrisch en transitief. Neem nu een willekeurige verzameling V. Alle verzamelingen, die evenveel elementen als V hebben, vormen een nieuwe verzameling V_1. Neem voorts een verzameling W, die niet tot V_1 behoort. De verzameling van die verzamelingen, welke evenveel elementen als W hebben, noemen we W_1. Het blijkt nu, dat V_1 en W_1 geen element gemeen kunnen hebben. Neem nu een verzameling U, die wel tot V_1 behoort, en vorm op analoge wijze de verzameling U_1. Dan blijkt U_1 dezelfde verzameling te zijn als V_1. Door de relatie E worden de verzamelingen dus in groepen verdeeld, waarvan de verzamelingen elk evenveel elementen bevatten, terwijl verzamelingen, die tot verschillende groepen behoren, niet evenveel elementen bevatten. Het hebben van een bepaald aantal elementen kan daardoor per definitie gekoppeld worden aan het behoren tot een bepaalde dergelijke groep. Een definitie van deze soort, die altijd mogelijk is, als we beschikken over een reflexief-symmetrisch-transitieve relatie, noemen we een *definite door abstractie*.

De definite door abstractie is geen verzinsel van mathematici, maar komt in de dagelijkse en wetenschappelijke praktijk meer voor dan men aanvankelijk zou vermoeden. De meest primitieve vorm ervan wordt waarschijnlijk geleverd door de manier, waarop we de kleuren hebben leren kennen. Tussen de kleuren kunnen we een zekere mate van overeenstemming constateren, die daardoor ons bewust werd, dat bepaalde kleuren door onze ouders met dezelfde naam bestempeld werden. Deze overeenstemming was een relatie tussen kleuren, die aan de gestelde drie eisen voldeed. Daardoor konden we de kleuren in groepen verdelen, die elk van een bepaalde naam (rood, groen, enz.) voorzien werden.

Een relatie, die reflexief, symmetrisch en transitief is, noemen we

een *ekwivalentierelatie*, de door middel ervan gedefinieerde verzamelingen *ekwivalentieklassen*. De kardinaalgetallen zijn dus per definitie niets anders dan ekwivalentieklassen.

Een ander voorbeeld is de waarde van een munt. Munten hebben gelijke waarde, als men ze voor dezelfde hoeveelheid goederen kan inruilen. „Gelijke waarde hebben" is hier de ekwivalentierelatie, de ekwivalentieklassen bestaan uit munten van gelijke waarde. Op analoge manier worden door abstractie gedefinieerd de sterkte van een materiaal, de ruwheid van een oppervlak, de grootte van een oppervlak, de steilheid van een weg, enz. Weliswaar kan men deze alle in een getal uitdrukken, maar dit benoemde getal is niets anders dan een naam voor de ekwivalentieklasse.

In de natuurkunde zegt men, dat twee voorwerpen dezelfde temperatuur hebben, als er geen warmtestroom ontstaat, als ze met elkaar in aanraking gebracht worden. Ook temperatuur wordt zo door middel van abstractie gedefinieerd. Hetzelfde geldt voor de massa. Twee voorwerpen hebben gelijke massa, als ze ten gevolge van dezelfde kracht dezelfde versnelling krijgen. In plaats van de massa zou men ook het gewicht door abstractie kunnen definiëren [1]).

Een bekend meetkundig voorbeeld, dat men ook aan het dagelijks spraakgebruik zou kunnen ontlenen, is ten slotte de definitie van de richting van een rechte lijn. Een ander voorbeeld is de vorm van een figuur. Men ziet uit al deze voorbeelden, dat ekwivalentieklassen steeds verzamelingen van dingen zijn, die onder een bepaald gezichtspunt aan elkaar gelijk zijn. Men noemt daarom een ekwivalentierelatie ook wel een gelijkheidsrelatie.

[1]) Sommige voorbeelden zijn ontleend aan Prof. Dr. L. Campedelli.

DE OPLOSSING VAN HET UITWENDIG-BALLISTISCHE HOOFDPROBLEEM II *)

door

Dr. W. BEVELANDER

leraar aan de Koninklijke Militaire Academie
te Breda

10. *Methoden met als uitgangspunt de benaderde ballistische hoofdvergelijking.*

We zullen nu enkele rekenwijzen bespreken, die berusten op het in punt 5, 2° genoemde beginsel. De integratie verloopt algemeen als volgt [13]):

$$\text{Verg. (16):} \quad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g\,du}{c\gamma u f(u)} \quad \text{met:} \quad u = \frac{V\cos\theta}{\sigma}.$$

Geïntegreerd van het begin van de baan tot een nog nader te bepalen punt in deze baan:

$$\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g}{c\gamma}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{uf(u)} \tag{28}$$

$$\text{met:} \quad u_0 = \frac{V_0\cos\varphi}{\sigma} \tag{29}$$

De integraal in het rechterlid is, als voor de luchtweerstandswet een eenheidswet wordt gekozen, moeilijk op te lossen. Men vervangt deze integraal daarom door een symbool en spreekt dan van een *primaire functie van Siacci.* Deze en andere optredende, soortgelijke integralen, worden voor een bepaalde luchtweerstandswet berekend en in een tabel verzameld. Aldus kunnen de berekeningen voor het bepalen van projectielbanen, door gebruikmaking van deze tabellen, aanzienlijk vereenvoudigd worden. Zo schrijft men:

$$J(u) = -2g\int \frac{du}{uf(u)}, \tag{30}$$

*) Deel I werd afgedrukt in Euclides 37, blz. 11.

13) [1] pg. 71 t/m 73
[2] pg. 147 t/m 151.

waardoor (28) overgaat in:

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,\varphi - \frac{1}{2c\gamma}\,[\text{J}(u) - \text{J}(u_0)] \tag{31}$$

Eliminatie van $\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ uit (11) en (16) levert ons:

$$dx = -\frac{\sigma^2}{c\gamma}\cdot\frac{u\,du}{f(u)} \tag{32}$$

Geïntegreerd:

$$\int_0^x dx = -\frac{\sigma^2}{c\gamma}\int_{u_0}^{u}\frac{u\,du}{f(u)}$$

Stellend, als tweede primaire functie:

$$\text{D}(u) = -\int\frac{u\,du}{f(u)}, \tag{33}$$

krijgen we:

$$x = \frac{\sigma^2}{c\gamma}\,[D(u) - \text{D}(u_0)] \tag{34}$$

Op soortgelijke wijze vinden we:

$$t = \frac{\sigma}{c\gamma}\,[\text{T}(u) - \text{T}(u_0)] \tag{35}$$

$$y = x\,\text{tg}\,\varphi - \frac{x}{2c\gamma}\left[\frac{\text{A}(u) - \text{A}(u_0)}{\text{D}(u) - \text{D}(u_0)} - \text{J}(u_0)\right] \tag{36}$$

met:

$$\text{T}(u) = -\int\frac{du}{f(u)} \tag{37}$$

en:

$$\text{A}(u) = -\int\frac{u\cdot\text{J}(u)\cdot du}{f(u)} \tag{38}$$

11. *De methode Didion* (1848) [14].

Didion gebruikt de benaderde hoofdvergelijking, doch voert nog niet de, in punt 10 genoemde, primaire functies in. Hij kiest de

---

[14]) [1] pg. 73—74.
[2] pg. 154 t/m 160.
[4] pg. 316 t/m 318.

x-coördinaat als onafhankelijk veranderlijke, zodat we uit kunnen gaan van vergelijking (32):

$$dx = -\frac{\sigma^2}{c\gamma} \cdot \frac{u\,du}{f(u)} \tag{32}$$

Volgens formule (15) zijn σ en γ in de plaats gesteld van $\cos\theta$. Didion schrijft nu:

$$\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}, \tag{39}$$

zodat

$$\alpha = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{ds}{dx} \tag{40}$$

In het luchtledig kan men de volgende formule afleiden [15]):

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{gx}{V_0^2\cos^2\varphi}, \tag{41}$$

dus:

$$d(\operatorname{tg}\theta) = -\frac{g\,dx}{V_0^2\cos^2\varphi} \tag{42}$$

of:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{g\,dx}{V_0^2\cos^2\varphi} \tag{43}$$

Elimineren we dx uit (40) en (43), dan volgt:

$$ds = -\frac{V_0^2\cos^2\varphi}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

en geïntegreerd: $$\int_0^{s_1} ds = -\frac{V_0^2\cos^2\varphi}{g}\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{44}$$

Reeds eerder schreven we: $\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \xi_2(\theta)$,

zodat:

$$\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \xi_2(\theta) - \xi_2(\varphi).$$

Vergelijking (44) gaat dan over in:

$$s_1 = \frac{V_0^2\cos^2\varphi}{g}\,[\xi_2(\varphi) - \xi_2(\theta)] \tag{45}$$

---

[15]) [1] pg. 8.

Voor het luchtledig volgt uit (41):

$$x_1 = \frac{V_0^2 \cos^2\varphi}{g} (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta) \tag{46}$$

Uit (45) en (46):

$$\frac{s_1}{x_1} = \frac{\xi_2(\varphi) - \xi_2(\theta)}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta} \tag{47}$$

In (47) is s_1 de lengte van de boog voor een baan in het luchtledig, met gelijke waarden voor φ, θ en V_0, als voor de baan in de atmosfeer en x_1 is de horizontale projectie van deze boog.

Didion schrijft nu:

$$\alpha = \frac{\xi_2(\varphi) - \xi_2(\theta)}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta} \tag{48}$$

en:

$$f(V) = V^2\left(1 + \frac{V}{r}\right), \tag{48a}$$

waarin: $r = 435$.

We concluderen uit (32), na invoering van (39) en (48a):

$$\int_0^x dx = -\frac{1}{\alpha c}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u\left(1 + \frac{u}{r}\right)} \tag{49}$$

$$\alpha c x = \ln \frac{1 + \frac{u}{r}}{\frac{u}{r}} - \ln \frac{1 + \frac{u_0}{r}}{\frac{u_0}{r}} \tag{50}$$

Uit (15b) en (39) volgt:

$$u = \frac{V\cos\theta}{\sigma} = \alpha V \cos\theta$$

en:

$$u_0 = \alpha V_0 \cos\varphi.$$

Vergelijking (50) kunnen we in de volgende vorm schrijven:

$$V\cos\theta = \frac{V_0\cos\varphi}{(1 + K_0)e^{c\alpha x} - K_0}, \tag{51}$$

waarin

$$K_0 = \frac{\alpha V_0 \cos\varphi}{r} \tag{52}$$

Anders geschreven:

$$V \cos \theta = \frac{V_0 \cos \varphi}{R(\alpha c x, K_0)} \tag{53}$$

Zo kunnen we eveneens afleiden:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot B(\alpha c x, K_0) \tag{54}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{V_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot J(\alpha c x, K_0) \tag{55}$$

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \varphi} \cdot D(\alpha c x, K_0) \tag{56}$$

Door het probleem op bovengenoemde wijze aan te pakken, bleek het mogelijk om alle integraties uit te voeren. De functies R, B, J en D zijn te berekenen met behulp van tabellen [16]).

Voor het bepalen van de invalshoek ω, de eindsnelheid V_e en de vluchttijd T in de gehele baan, moeten we uitgaan van een gegeven dracht X en uitvaartshoek φ. Verder moet de aanvangssnelheid V_0 en de waarde van de ballistische coëfficiënt c bekend zijn. Voor α kiest men in (48) als eerste benadering:

$$\alpha = \frac{\xi_2(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} \tag{57}$$

Dan zijn $\alpha c X$ en K_0 bekend en kunnen voorlopige waarden voor ω, V_e en T gevonden worden. Daarna wordt een herziene waarde van α bepaald uit (48):

$$\alpha = \frac{\xi_2(\varphi) - \xi_2(\omega)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \omega},$$

en de berekening opnieuw uitgevoerd. Zonodig wordt deze nog één of meerdere malen herhaald, totdat de gevonden uitkomsten voor ω, V_e en T weinig meer veranderen.

Voor alle gewenste punten van de baan kan men nu y, θ, V en t berekenen. Men kiest hiertoe een bepaalde x en α voor de eerste benadering volgens (57). Met de gevonden θ kan een herziene α worden bepaald, volgens formule (48). Na enkele herhaalde berekeningen vindt men bevredigende uitkomsten voor y, θ, V en t.

Voor het bepalen van het culminatiepunt is deze methode enigszins onhandig. Geen moeilijkheden levert de bepaling van α op, daar in (48) direct $\theta_c = 0$ kan worden ingevoerd. We bepalen vervolgens met (52) een waarde van K_0. In (55) is nu $\theta_c = 0$. Teneinde

[16]) [2] pg. 569 t/m 571

uit deze vergelijking de functie J te kunnen oplossen, moeten we voor de, in de vergelijking voorkomende, x-coördinaat van het culminatiepunt een schatting doen, waarbij we bedenken, dat $x_c > \frac{1}{2}X$. Uit (55) lossen we J op en hieruit weer $\alpha c x_c$ en dus x_c. De aldus gevonden abscis van het culminatiepunt wijkt, in het algemeen, af van de geschatte waarde. Deze beide waarden moeten naar elkaar toegebracht worden, door een hernieuwde schatting en een herhaalde berekening, enz.

Door de vorm, waarin de functie J voorkomt, levert deze rekenwijze echter moeilijkheden op. Vlugger komt men hier tot een resultaat door de geschatte waarde van x_c in te voeren voor x en in $\alpha c x$ van vergelijking (55), waarbij tg $\theta_c = 0$. Doorgaans voldoen de aldus gevonden waarden niet aan de vergelijking. We gaan dan de waarde van x_c wijzigen, net zolang, totdat het invoeren van x_c in (55) een identiteit oplevert. Daarna zijn met (53), (54) en (56) waarden voor V_c, y_c en t_c te bepalen.

12. *De methode Didion-Bernoulli* [17]).

De *methode Didion-Bernoulli* gaat uit van dezelfde principes, als de in punt 11 behandelde *methode Didion.* Echter stelt men hier $f(V) = V^n$, waardoor de functies R, B, J en D uit de vergelijkingen (53) t/m (56) een enigszins andere vorm krijgen. Voor $n = 2$, 3 en 4 kunnen dezelfde tabellen gebruikt worden, als genoemd bij de methode *Didion.*

Deze rekenwijze werd in het begin van deze eeuw in Nederland, bij de *Commissie van Proefneming,* gebruikt om projectielbanen te bepalen en schootstafels samen te stellen. Uit de literatuur blijkt, dat de Amerikanen deze oplossingsmethode, in het begin van de tweede wereldoorlog, nog wel eens toepasten.

13. *De methoden van Siacci.*

De *Italiaanse* ballisticus *Siacci* publiceerde, aan het eind van de vorige eeuw, achtereenvolgens drie methoden. De *eerste* verscheen in 1880. Hij doet hier een bepaalde keuze voor σ en γ uit de formule (15) en gebruikt voor de luchtweerstand de *zonewetten van Mayevski.* De *primaire functies van Siacci,* vermeld in punt 10, worden bij de integratie aangewend. De optredende integratie constanten worden nu zo gekozen, dat bij de grenzen der zones, waar immers de weerstandsgraad verandert, geen sprongen in de waarden van de lucht-

---

17) [1] pg. 74
[2] pg. 160—170.

weerstand optreden. Bij de punten van aansluiting van twee zones, zal echter wel een discontinuïteit blijven bestaan.

De *tweede methode van Siacci* is gedateerd 1888. Hij neemt nu andere waarden voor σ en γ en wel dezelfde, die hij in zijn derde methode aanwendt. Tevens treden dan de z.g. *secundaire functies van Siacci* op. Voor de luchtweerstand komt hij met *eigen zonewetten.* [18]).

In 1896 maakt *Siacci* tenslotte een *derde* methode openbaar. Hierin wordt voor het eerst gebruik gemaakt van een *eenheidswet* [19]). Bij deze methode werden door *Fasella* tabellen samengesteld, gepubliceerd in 1901 [20]). In verband hiermede is de benaming veelal: *methode Siacci-Fasella.*

Het klaarmaken van de tabellen is van groot belang voor het gebruik van de methode en vraagt een omvangrijk rekenwerk. Dit is echter geen bijzondere wetenschappelijke prestatie. We kunnen dus veilig zeggen, dat de vernieuwde wiskundige opzet van de derde methode, gecombineerd met de oorspronkelijke wijze van opstellen van de luchtweerstandswet als eenheidswet, geheel op naam van *Siacci* is te stellen. Hij behoort tot de ballistici van wereldnaam, zoals later *Cranz* in *Duitsland* en *Garnier* in *Frankrijk.* Het is dus volkomen begrijpelijk, dat aan de militaire academies in *Italie,* bij de opleiding van de jonge cadetten de derde methode van *Siacci* nog steeds op het programma staat.

14. *De methode Siacci* III (1896) [21]). (*Siacci-Fasella*).

Siacci gaat hier uit van de benaderde hoofdvergelijking en zijn methode berust dus op het principe, genoemd in punt 5, 2^e. *Siacci* stelt:

$$\sigma = \cos\varphi \quad \text{en} \quad \gamma = \beta\cos^2\varphi \tag{58}$$

Dan is volgens (15b):

$$u = \frac{V\cos\theta}{\sigma} = \frac{V\cos\theta}{\cos\varphi} \tag{59}$$

---

18) [1] pg. 29.
19) Euclides jg. 35, pg. 283.
20) Ettore Fasella — Tavole balistiche secondarie (1901).
21) [1] pg. 76 tm/ 80.
[2] pg. 175.
[3] pg. 31 t/m 38.
[4] pg. 434 t/m 455.

en

$$u_0 = \frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \varphi} = V_0 \qquad (60)$$

We kunnen verder aansluiten bij de afleidingen uit punt 10. Echter zullen we een enigszins andere notatie invoeren, die ook bij de *tabellen van Fasella* wordt aangehouden.

We schrijven:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= D(u) - D(u_0) \\ f_4(x) &= J(u) - J(u_0) \\ f(x) &= \frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) \\ f_3(x) &= T(u) - T(u_0) \end{aligned} \qquad (61)$$

Verder stelt *Siacci* nog:

$$c' = \frac{1}{c\beta} \qquad (62)$$

Men noemt c' de *gereduceerde ballistische coëfficient.* Met behulp van (58), (61) en (62) krijgen nu de vergelijkingen uit punt 10, de volgende vorm:

$$(31) \rightarrow \qquad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} f_4(x) \qquad (63)$$

$$(34) \rightarrow \qquad x = c' f_0(x) \qquad (64)$$

$$(35) \rightarrow \qquad t = \frac{c'}{\cos \varphi} f_3(x) \qquad (65)$$

$$(36) \rightarrow \qquad y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{xc'}{2 \cos^2 \varphi} f(x) \qquad (66)$$

De vergelijkingen (63) t/m (66) gelden *voor ieder punt van de baan.* Deze methode is ontworpen om banen voor landdoelgeschut te berekenen, waarbij we ons speciaal interesseren voor de grootheden in het eindpunt van de baan en in het culminatiepunt. De laatste waarden speciaal voor het berekenen van de correcties voor afwijkend luchtgewicht en voor wind.

Siacci voert nu als *secundaire functies* in:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{f_0(x)} \qquad (67)$$

$$f_2(x) = \frac{f_4(x)}{f(x)} - 1 \qquad (68)$$

Voor *het eindpunt van de baan,* waarvoor geldt: $y = 0$, $x = X$,

$\theta_e = -\omega$ en $V = V_e$, kunnen we nu uit (59) en (63) t/m (68) afleiden:

$$f_0(X) = \frac{X}{c'} \tag{69}$$

$$f(X) = \frac{\sin 2\varphi}{c'} \tag{70}$$

$$f_1(X) = \frac{\sin 2\varphi}{X} \tag{71}$$

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi \cdot f_2(X) \tag{72}$$

$$V_e = \frac{u_e \cos\varphi}{\cos\omega} \tag{73}$$

$$T = \frac{c'}{\cos\varphi} \cdot f_3(X) \tag{74}$$

Van het *culminatiepunt* is eigenlijk alleen de hoogte van belang. In dit punt is $\theta_c = 0$. *Siacci* leidt nu uit bovenstaande vergelijkingen speciale functies af voor dit punt, n.l.:

$$f_5(x_c) = \frac{x_c}{X} \tag{75}$$

$$f_6(x_c) = \frac{y_c}{X \operatorname{tg}\varphi} \tag{76}$$

15. *De correctiefactor β van Siacci.*

We schreven in (14a) de *exacte hoofdvergelijking* in de volgende vorm:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{gd(V\cos\theta)}{V\cos\theta\; c_v\; f(V)\cos\theta}$$

Voor de *benaderde hoofdvergelijking* kozen we volgens formule (15a):

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{gd\left(\frac{V\cos\theta}{\sigma}\right)}{\frac{V\cos\theta}{\sigma}\; c_0\, f\left(\frac{V\cos\theta}{\sigma}\right)\gamma}$$

Voegen we voor σ en γ de waarden uit (58) in en stellen we daarna de rechterleden van beide bovenstaande vergelijkingen aan elkaar gelijk, dan kunnen we uit de ontstane vorm de β oplossen:

$$\beta = \frac{c_v}{c_0} \cdot \frac{f(V)}{f\left(\frac{V\cos\theta}{\cos\varphi}\right)} \cdot \frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi} \tag{77}$$

Door omvangrijke herleidingen [22]) is *Siacci* er in geslaagd de β te bepalen als functie van de dracht X en de uitvaartshoek φ [23]). Deze correctiefactor β treedt op in de gereduceerde ballistische coëfficiënt (62). Hoewel de herleiding van β tot zijn uiteindelijke vorm niet geheel exact geschiedt, is het toch mogelijk gebleken, de methode van *Siacci* toe te passen tot *uitvaartshoeken van* 45°.

Omstreeks 1925 is deze methode in *Nederland* bij de *Commissie van Proefneming* ingevoerd, bij het samenstellen van schootstafels voor het landdoelgeschut.

16. *Het gebruik van de tabellen van Fasella.*

Teneinde de juiste projectielbanen te vinden, moeten we uitgaan van het *experiment.* De luchtweerstandswet $f(V)$ van *Siacci* is eens en vooral vastgelegd. Ook voor de ballistische coëfficiënt c, alsmede voor de gereduceerde ballistische coëfficiënt c', hebben we een formule gegeven (62) [24]). De formules voor c en c' worden echter slechts toegepast voor berekeningen a priori. We bepalen hiermede voorlopige banen, teneinde te weten, waar de projectielen ongeveer terecht zullen komen. Dit is van belang voor de waarnemer, die de inslagen moet kunnen constateren, teneinde de juiste plaats van neerkomen der projectielen te bepalen.

We schieten onder verschillende uitvaartshoeken en meten steeds de dracht op. Voor iedere uitvaartshoek moeten we 10 à 15 waarnemingen hebben. Na diverse correcties, o.a. ter eliminering van de wind en ter herleiding op het luchtgewicht van de standaardatmosfeer, komen we tot een *gecorrigeerde dracht en uitvaartshoek.* Met deze dracht en uitvaartshoek, alsmede met de aanvangssnelheid van het projectiel, die ook weer op een speciale manier wordt gemeten, kunnen we nu, met behulp van de *tabellen van Fasella,* de noodzakelijke gegevens van de projectielbanen uitrekenen.

Bij de gecorrigeerde uitvaartshoeken en drachten en de bekende aanvangssnelheid, zoeken we allereerst waarden voor c', die dus *berusten op het experiment.* We construeren met de gevonden c'-waarden een φ — c' *kromme.* Daarna kunnen we uit deze kromme, voor iedere gewenste uitvaartshoek φ, een c' aflezen.

Voor de banen, waarvoor experimenten zijn gedaan, bestaat ons uitgangspunt uit V_0, φ en X. Voor alle andere banen, dus in het

---

[22]) [2] pg. 176 t/m 178.

[23]) [2] pg. 674, tabel 11, slot en pg. 706, diagram VI.

[24]) Euclides jg. 35, pg. 283 formules (14) en (15).

algemeen voor die, benodigd voor het opstellen van de schootstafel, vormen V_0, φ en c' de beginwaarden, waarvan we uitgaan.

De *tabellen van Fasella* zijn geconstrueerd met een *dubbele ingang*, n.l. V_0 en f_0. In het raam van de tabellen treft men dan de overige primaire en secundaire functies f aan, alsmede de u. Met de bovengenoemde begingegevens, de tabellen en de formules (69) t/m (74) berekenen we nu voor het eindpunt van de baan ω, V_e en T.

De coördinaten van het culminatiepunt volgen uit (75) en (76). Tenslotte leveren de vergelijkingen (59) en (63) t/m (66) ons de mogelijkheid, om voor ieder gewenst punt van de baan, waarvoor een abscis gegeven is, de waarden van y, V, θ en t te bepalen.

17. *Toepassing van een reeksontwikkeling.*

Er zijn in de loop der jaren ook pogingen aangewend om, met behulp van de *reeks van Mc. Laurin,* methoden te vinden ter berekening van banen voor landdoelgeschut [25]). Dit zijn methoden, berustend op het principe, genoemd in punt 5, 3^e^. Men schrijft:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \frac{x^3}{3!} F'''(0) + \dots \qquad (78)$$

We stellen $y = F(x)$ en vinden dan na enkele malen differentiëren en het invoeren van $x = 0$ de volgende vergelijking:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\varphi} \left[1 + \frac{2cf(V_0)x}{3V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right] \qquad (79)$$

Door differentiatie van (79) krijgen we een formule voor $\operatorname{tg} \theta$. Nogmaals differentiëren levert ons een vergelijking op, waaruit de snelheid V kan worden opgelost.

Uit: $$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta,$$

volgt: $$dt = \frac{dx}{V \cos \theta}.$$

Na integratie ontstaat hieruit een formule voor de vluchttijd t.

Deze manier van werken is praktisch toegepast bij twee Franse methoden, n.l. die van *Piton-Bressant,* waarbij de resttermen verwaarloosd worden en die van *Duchêne,* waarbij één term van de rest wordt meegenomen.

---

[25]) [1] pg. 84 t/m 87.
[2] pg. 195 t/m 206.
[3] pg. 174—175.

18. *Slotopmerkingen.*

We hebben nu de voornaamste methoden, ter berekening van banen voor landdoelgeschut, besproken. De 20e eeuw heeft op dit gebied weinig nieuwe ontwikkelingen te zien gegeven, daar de eerste wereldoorlog het probleem van het afweergeschut tegen vliegtuigen naar voren deed komen. Hierbij werden geheel andere eisen gesteld en moesten nieuwe methoden worden ontwikkeld ter berekening van projectielbanen.

In het bovenstaande zijn uitsluitend methoden aangegeven ter bepaling van normale banen, zonder rekening te houden met eventuele correcties tengevolge van wind en afwijkingen in luchtgewicht, aanvangssnelheid en projectielgewicht. Deze z.g. *ballistische storingsrekening* is een onderwerp op zichzelf.

Tot slot willen we nog enkele namen vermelden van ballistici, die zich eveneens hebben bezig gehouden met het ontwerpen van landdoelmethoden, welke echter minder naar voren zijn gekomen. We noemen *Cavalli, Charbonnier, Hélie, Krupp, Poncelet, Rousier-Dufrénois, St. Robert, Vallier, Veithen* en *Zaboudski.*

LITERATUUROPGAVE

[1] W. Bevelander — Uitwendige ballistiek, diss. Leiden 1954.
[2] C. Cranz — Lehrbuch der Ballistiek (1925), deel I
[3] Dufrénois, Risser, Rousier — Les méthodes actuelles de la balistique extérieure (1921)
[4] P. Charbonnier — Traité de balistique extérieure, Tome II (1927)

DE STERRENKUNDE GESCHRAPT VAN HET VERPLICHTE V. H. M. O. PROGRAMMA

door

PROF. DR. M. MINNAERT

Utrecht.

Gedurende vele jaren hebben onze B gymnasia en onze B hogere burgerscholen aan duizenden jonge Nederlanders een eenvoudige, maar zeer verhelderende uiteenzetting gegeven van de plaats onzer aarde in het Zonnestelsel. Daarna hebben de leraren zich beijverd om ouderwetse behandeling te vervangen door een andere, die inzicht geeft in de grootsheid van de sterrenbezaaide hemel en de harmonie van de alom geldende natuurwetten.

Maar nu is er onlangs iets gebeurd. In de gehele wereld is een ontzaglijke belangstelling voor de Sterrenkunde ontstaan. Grote, nieuwe sterrenwachten zijn gebouwd. Een hechte internationale samenwerking tussen alle astronomen is ontstaan. De radio-astronomie heeft ons geheel onvermoede mogelijkheden aan de hand gedaan om het heelal te onderzoeken, en overal verrijzen radioteleskopen als fantastische bouwsels van nooit gekende vorm en afmetingen. We hebben raketten in de ruimte gezonden, die ter plaatse de gassen en de stralingen gaan onderzoeken en die de achterkant van de maan hebben gefotografeerd. Deze raketten zeilen voorbij aan de avondhemel, miljoenen mensen zien ze met eigen ogen en worden diep ontroerd door de werkelijkheid van de wetenschap.

Juist in deze jaren wordt een nieuwe, omvattende regeling voor ons onderwijs voorbereid, en

de sterrenkunde wordt van het verplichte programma geschrapt !

Wij die dachten, dat er alle moeite gedaan werd om de school dichter bij het leven te brengen! Wij die ons voorstelden, dat ieder ontwikkeld mens in grote trekken iets weten moet van de bouw van het Heelal en van de plaats van de Aarde in dat Heelal. Wij, die weten dat men in één of twee jaar-uren Sterrenkunde-onderwijs, met een minimum dus aan tijd, een maximum effect bereiken kan, een belevenis die onze leerlingen voor goed zal bijblijven!

—„Natuurlijk wegens gebrek aan tijd".

—„Maar de vijfjarige H.B.S. verandert in een zesjarige Atheneum Er komt *een geheel jaar* bij, dat tussen de verschillende vakken verdeeld moet worden!

En dan te bedenken, dat, nog maar weinige jaren geleden, een

gezaghebbend inspecteur, op een jaarvergadering van VELINES, meedeelde dat het in de bedoeling lag, de Sterrenkunde aan de H.B.S. van 1 op 2 jaar-uren te brengen.

Ik wil hier niet alle argumenten herhalen, waarmee de Nederlandse Astronomen-Club en vele deskundigen de betekenis van de Sterrenkunde bij het V.H.M.O. hebben aangetoond: algemeen menselijke waarde, achtergrond voor het geheel der natuurwetenschappen, voorbeeld van geïntegreerd toegepaste wis- en natuurkunde, feest voor schoonheidszin en fantasie.

Liever zal ik trachten, mij in te denken in de redenen die wellicht aanleiding hebben gegeven tot deze onverwachte afschaffing.

a) Wellicht vreest men een terugvallen in de coördinatenstelsels en de drie soorten tijdmeting. Ik sta er pertinent voor in, dat allen, die in de laatste 20 jaar aan onze Universiteiten gevormd zijn, een geheel andere geest in het onderwijs van de Sterrenkunde hebben gebracht, en dat ook de overgrote meerderheid van de oudere leraren naar de nieuwe opvattingen is overgegaan. Overigens: late men een fris en modern programma opstellen!

b) Wellicht heeft men vooropgesteld, dat het aantal vakken kost wat kost beperkt moet worden. Men hoopt misschien, iets van Sterrenkunde als onderdeel van de Natuurkunde te laten behandelen. - Maar dan vergeet men, dat de hoofdzaak van de Sterrenkunde is en blijft: *de bouw van het Heelal. De Astrophysica, hoe belangrijk en prachtig ook op zichzelf, krijgt haar betekenis slechts in dienst van dit hoofddoel.* Als zodanig is de Sterrenkunde dus fundamenteel onderscheiden van de Natuurkunde en geheel zelfstandig. Het is een wetenschap van de *geïndividualiseerde* natuurverschijnselen, zoals de Biologie, in tegenstelling tot de Natuurkunde, die de meest *algemene* eigenschappen van materie en straling behandelt. Dus geen „aanhangsel" van de Natuurkunde, ook niet bij het V.H.M.O., waar zulk een aanhangsel weldra gebruikt zou worden als *middel* om enkele natuurkundige verschijnselen te illustreren, of verdrongen zou worden door de elektromagnetische eenheden en andere moeilijke zaken van het eindexamen. Wat is er eigenlijk tegen een vak meer? Vreest men verbrokkeling, dan geve men 4 uur Sterrenkunde in de week gedurende een half schooljaar (alhoewel dat sommige bezwaren heeft).

c) Ik mag niet onbillijk zijn. In de A-afdeling zal er les gegeven worden in „Natuurkennis", - een vak, waar er iets van te maken is, als men er de geschikte leraren voor kan vinden -. Daar zal, hopen wij, ook wel een weinig Sterrenkunde ingevlochten worden. En in de B-afdeling wordt de mogelijkheid geopend, om gebruik te maken

van differentiëring in de hogere klassen en iets aan Sterrenkunde te doen met de bijzondere belangstellingen, terwijl men in plaats daarvan ook Wijsbegeerte, Esperanto, Voordrachtskunst of Godsdienstonderwijs mag kiezen. Ik vraag mij af, hoeveel hiervan terechtkomt. De keuze zal ten dele bepaald worden door de godsdienstige overtuiging door het „aardige" van de leraar, door de vrees van „te moeilijk", door de onbekendheid met hetgeen een cursus elementaire Sterrenkunde omvat. Maar in onze tijd is de Sterrenkunde *onmisbaar* voor *allen*, die opgeleid worden met de Natuurwetenschappen als grondslag, dus voor de gehele B-richting.

Ik spreek de hoop uit, dat de zeer velen, die de Sterrenkunde liefhebben, zich zullen realiseren welk een verlies het zou betekenen als dit prachtige vak van het V.H.M.O. verdween; en dat ze hun invloed ten goede zullen gebruiken.

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

op donderdag 28 december 1961 in „*Esplanade*", Lucas Bolwerk, Utrecht.

Aanvang 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter Dr. Joh. H. Wansink.
2. Notulen van de algemene vergadering van 28 december 1960 (gepubliceerd in dit nummer).
3. Jaarverslagen:
   a) van de secretaris (in dit nummer),
   b) van de penningmeester,
   c) van de kascommissie,
   d) van de redactie van „Euclides",
   e) van de commissie voor de leesportefeuille.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing, wegens periodieke aftreding van de heren dr. Joh. H. Wansink en drs. J. D. de Jong.
6. Wetenschappelijke voordracht door prof. dr. O. Bottema te Delft.

Pauze

In de middagvergadering, aanvangend $\pm$ 14.15 uur:

7. Voordracht door de heer Kl. Wigand te Krefeld.
8. Rondvraag.
9. Sluiting.

N.B. Deze mededeling geldt tevens als voorlopige convocatie voor de leden van Wimecos. Deze kunnen tot uiterlijk 1 december a.s. nieuwe agendapunten voorstellen bij de secretaris, Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist.

NOTULEN van de ALGEMENE VERGADERING van WIMECOS op 28 december 1960 in „ESPLANADE", te Utrecht.

In de loop der vergadering is de presentielijst getekend door dr. A. F. Monna en de inspecteur dr. W. H. Capel, dr. H. A. Gribnau en dr. D. N. van der Neut. Dr. P. Doornenbal is door ziekte verhinderd aanwezig te zijn. Ook de

ereleden P. Wijdenes en A. J. S. van Dam hebben de presentielijst getekend. Liwenagel is vertegenwoordigd door de heer D. Leujes, de wiskunde werkgroep van de W.V.O. door de heer Hermen J. Jacobs en Velines door dr. J. Schweers. Van Velebi is bericht van verhindering binnengekomen. De Belgische gasten en dr. Gloden uit Luxemburg zijn afwezig door de Belgische spoorwegstaking. De presentielijst is verder door 61 personen getekend, waaronder alle bestuursleden.

De voorzitter, dr. Joh. H. Wansink opent te 10.40 de vergadering; hij heet alle aanwezigen hartelijk welkom, in het bijzonder de bovenvermelde gasten en de beide sprekers op deze vergadering, prof. dr. S. C. van Veen te Delft en dr. L. N. H. Bunt te Utrecht. Daar dit openingswoord in „Euclides" zal worden gepubliceerd, kan met deze vermelding worden volstaan. Vervolgens wordt besloten aan dr. P. Doornenbal een telegram met de beste wensen voor zijn herstel te zenden. De notulen van de vorige jaarvergadering en de jaarverslagen van de secretaris, de penningmeester, de kascommissie en van de commissie voor de leesportefeuille, alle reeds in „Euclides" gepubliceerd, worden goedgekeurd. De penningmeester wordt gedéchargeerd; in de nieuwe kascommissie wordt de heer H. W. Lenstra herbenoemd, terwijl de heer W. F. Brandenburg vervangen wordt door de heer B. Kleefstra. Het bestuursvoorstel tot wijziging van de art. 9 en 13 van het huishoudelijk reglement wordt goedgekeurd.

Bij de bestuursverkiezing stelt de heer Koldijk, mede namens de heer van Wely, voor de nummers één van de voordracht bij acclamatie te kiezen. Aldus wordt in de vacature-Brinkman (die zich niet herkiesbaar stelde), gekozen dr. ir. B. Groeneveld en wordt de heer Hufferman herkozen. De voorzitter richt enige hartelijke woorden tot de heer Brinkman, die hiervoor vervolgens zijn dank betuigt. Dan wordt dr. Groeneveld door de voorzitter in het bestuur welkom geheten. Hiermede is het huishoudelijk gedeelte van de vergadering ten einde. Prof. dr. S. C. van Veen houdt nu zijn voordracht over „Gauss en zijn entourage". Het is de bedoeling deze zeer belangrijke voordracht in „Euclides" te publiceren.

De vergadering wordt nu tot 14.20 geschorst.

Het woord is dan aan dr. L. N. H. Bunt te Utrecht, die spreekt over: „De vernieuwing van het Amerikaanse wiskundeonderwijs." De spreker heeft veel litteratuur meegebracht, waarvoor grote belangstelling bestaat. Ook deze lezing zal in „Euclides" worden opgenomen.

Bij de rondvraag vraagt dr. Bronkhorst aandacht voor de z.g. van Andellycea in verband met de a.s. verdwijning van de mechanica uit de lesrooster. De heren dr. Monna, dr. van der Neut en dr. J. Schweers danken nu voor de ontvangen uitnodiging en spreken hun goede wensen voor de toekomst uit.

Te 16.50 sluit de voorzitter de vergadering.

JAARVERSLAG
OVER HET VERENIGINGSJAAR 1 SEPTEMBER 1960—31 AUGUSTUS 1961.

Aan het einde van het verslagjaar telde WIMECOS 528 leden en 3 ereleden; dit betekent een vooruitgang van het ledental met 18.

Op woensdag 28 december 1960 werd wederom in „Esplanade" te Utrecht de jaarvergadering gehouden. Bij de bestuursverkiezing werd dr. ir. B. Groeneveld gekozen in de plaats van de heer H. G. Brinkman, die zich niet herkiesbaar gesteld had en werd de heer J. F. Hufferman herkozen.

Een bestuursvoorstel tot wijziging van art. 9 en 13 van het huishoudelijk reglement werd aangenomen.

In de ochtendvergadering werd door prof. dr. S. C. van Veen te Delft een voordracht gehouden over: „Gauss en zijn entourage", terwijl in de middagvergadering dr. L. N. H. Bunt te Utrecht sprak over: „De vernieuwing van het Amerikaanse wiskunde-onderwijs".

Op 28 en 29 augustus werd weer te Amsterdam de vakantiecursus voor leraren gehouden. Zoals bekend worden deze cursussen georganiseerd door het Math. Centrum, daarbij geadviseerd door een commissie, waarin ook Wimecos vertegenwoordigd is. Ook dit jaar was de belangstelling groot.

Het bestuur vergaderde dit jaar 4 keer.

T.a.v. het aangenomen wetsvoorstel 6155 (over de afschaffing van de mechanica als zelfstandig leervak) werd door het bestuur een schrijven gericht aan de staatssecretaris, gedateerd 7 februari 1961. Dit schrijven werd in „Euclides" 36, X gepubliceerd tegelijk met een op 15 mei 1961 aan de minister gezonden brief n.a.v. wetsontwerp no. 5350 (de Mammoethwet).

15 november 1960 werd aan de staatssecretaris geschreven n.a.v. het K.B. 390 betreffende de eindexamens.

Bovendien werd in een brief van 6 december 1960 aan de staatssecretaris onze wens kenbaar gemaakt om geraadpleegd te worden bij de vaststelling van leerplannen, urentabellen, examenregelingen enz. voor zover ze de wiskunde betreffen.

De incorporatie van de mechanica in de natuurkunde leidde tot nauw overleg met Liwenagel en Velines.

De samenwerking met de zusterverenigingen was — als steeds — zeer goed.

De leerplancommissie vergaderde dit jaar niet.

Van de „250 Opgaven" verschenen een vijfde en zesde druk.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

55. Aan drie terdoodveroordeelden worden getoond 2 witte schijven en 3 zwarte. Hun wordt meegedeeld, dat zij elk één schijf op de rug krijgen van deze 5. Zij mogen elkaar wel zien, maar geen contact met elkaar hebben. Wie het eerste zegt, welke kleur zijn schijf heeft, en dit motiveren kan, krijgt gratie. Men plakt dan elk een zwarte schijf op de rug. Na enige tijd komt één van de gevangenen bij de bewaker en zegt: mijn schijf is zwart. Hoe motiveerde hij dat?

56. Een ambtenaar van de belastingen belt aan en vraagt: „Hoeveel kinderen heeft U?" Antwoord: „Eén." „Hoe oud?" De leeftijd wordt genoemd. Daarna gaat hij naar de buren. Hij vraagt: „Hoeveel kinderen heeft U?" Antwoord: „Drie." „Hoe oud?" „Het produkt van de leeftijden is 36." „Nu weet ik het nog niet." „De som is gelijk aan mijn huisnummer." De ambtenaar weet het nog niet. „Ze zijn alle drie jonger dan het kind van de buren, waar U zo juist geweest is." „Nu weet ik het." Wordt gevraagd, hoe oud de drie kinderen zijn.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

53. Trek AP en BP; noem de snijpunten van deze lijnen met de cirkel resp. Q en R. Trek AR en BQ en noem hun snijpunt C. Dan is P het hoogtepunt van driehoek ABC en is CP dus de gevraagde loodlijn.

54. Links en rechts worden niet verwisseld, maar wel voor en achter.